
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" ETAPA JUDEȚEANĂ - 21 februarie 2016

ȘTIINȚELE NATURII

BAREM - CLASA A X-A

1. a) $z = x + yi, \forall x, y \in \mathbb{R}$

③ p. $f(x + yi) = x + 5yi = a + bi \Rightarrow x = a$

$$y = \frac{b}{5}$$

.....

1p.

există un unic $z = a + \frac{b}{5}i \in \mathbb{C}$ a.î. $f(z) = a + bi \Rightarrow$

..... 1p.

$\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

$$f^{-1}(a + bi) = a + \frac{b}{5}i$$

..... 1p.

b) Inducție matematică

④p. I) Etapa de verificare pt. $n=1$

.....

1p.

II) Etapa de demonstrație

..... 3p.

2. a) Notăm $\log_2^x = t \Rightarrow x = 2^t \Rightarrow 8^t + 2^t = 10^t$

.....

1p.

③p. Împărțim prin $10^t \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$.

.....

1p.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{1}{5}\right)^t$ str. descresc.

$\Rightarrow f(t) = 1$ are cel mult o sol.

$$f(1) = 1 \Rightarrow t = 1 \text{ sol. unică} \Rightarrow x = 2 \text{ sol. unică}$$

1p.

$$b) x > 0 ; \text{știm că } a^{\log_x b} = b^{\log_x a} \Rightarrow$$

$$\textcircled{4}p. \quad 25^{\log_5^2 x} = (25^{\log_5^x})^{\log_5^x} = (x^{\log_5^{25}})^{\log_5^x} = x^{2\log_5^x}$$

$$\Rightarrow x^{2\log_5^x} + x^{\log_5^x} \leq 30 ; \text{notăm } x^{\log_5^x} = t$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 30 \leq 0 \Rightarrow t \in [-6 ; 5]$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{5} ; 1 \right]$$

1p.

3. a) Condiția de existență: $x \in (0, 2]$

$$y \in (0, 1]$$

$\textcircled{3}p.$

$$z \in (0, 2]$$

1p.

$$\Rightarrow 2^x + y + \log_2^z \leq 2^2 + 1 + \log_2^2 = 6 \leq 6 + \sqrt{2-x}$$

$$\Rightarrow 2^x + y + \log_2^z \leq 6 + \sqrt{2-x}$$

Egalitate, pentru $x = 2, y = 2, z = 2$ care verifică și

celelalte ecuații ale sistemului.

$\textcircled{4}p.$ b) Observăm că dacă (x, y, z) e soluție $\Rightarrow (x, y, -z)$ e soluție

$$\Rightarrow z = -z \Rightarrow z = 0$$

Dacă (x, y) e soluția noului sistem $\Rightarrow (x, 1-y)$ e soluție.

$$\Rightarrow y = 1 - y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$3^x + 2^x = 5 \text{ cu soluție unică } x = 1 \Rightarrow a = 2$$

1p.

4. a) Condiție $x \in [-1, 1]$

③p. Știm că $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$

..... 1p.

Prin adunare obținem $2 \arccos(x) = \frac{2\pi}{3}$ 1p.

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \in [-1, 1]$ 1p.

④p. b) Dacă $a = b = 0 \Rightarrow$ relația evident adevărată 1p.

Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(x) \right| =$

$|\cos(t) \sin(x) + \sin(t) \cos(x)| = |\sin(x+t)| \leq 1$ 3p.